

## 길이방향으로 이동하고 장력을 가진 보의 경계제어를 통한 지수안정화

### Exponential Stabilization of an Axially Translating Tensioned Beam by Boundary Control Together with a Passive Damper

최 지 윤, 홍 금 식  
(Ji-Yun Choi and Keum-Shik Hong)

**Abstract** : An active control of the lateral vibration of a translating tensioned Euler-Bernoulli beam is investigated. The dynamics of the translating tensioned beam is represented by a non-linear hyperbolic partial differential equation. A right boundary control law based upon the Lyapunov's second method is derived. The transverse motion of the translating tensioned beam is controlled by a time-varying external force besides a passive damping applied at the right boundary. Exponential stability of the closed loop system is proved. Simulation results demonstrate the effectiveness of the proposed controller.

**Keywords** : translating tensioned beam, boundary control, Lyapunov method, exponential stability, passive damping

#### I. 서론

현대와 같은 산업화 시대에 공학분야에서 길이방향으로 이동하는 시스템(axially moving system)은 다양하게 나타나고 있다. 예를 들면, 벨트, 체인 등과 같은 동력전달의 수단, 자기테이프와 같은 저장 및 기록의 수단, 락톱(band saw)과 같은 생산가공의 수단, 아연도금공정에서의 강판의 이동 등과 같이 많은 분야에서 다양한 형태로 나타나고 있다. 이러한 시스템은 폴리의 편심, 구동모터의 일정하지 않은 회전속도, 외부로부터의 공기역학적인 외란, 재료의 불균일성 등으로 인해서 횡방향(transverse direction) 진동이 발생하게 되며, 이러한 진동은 실제적 적용에 제한요소가 되고 있다.

길이방향으로 이동하는 시스템 및 분포매개변수시스템(distributed parameter system)의 동특성 해석과 안정성 연구, 능동 및 수동적인 제어방법의 개발에 관한 연구는 세계적으로 활발히 진행되어왔다[2, 4, 6-8, 10-11, 14-20, 23-25]. 특히 Mote[10]는 락톱기계의 락톱을 길이방향으로 이동하는 현으로 모델링하여, 이동속도와 폴리의 축이동 가진 주파수에 따른 계의 불안정성을 연구하였고, Wickert와 Mote[11]는 감쇠와 강성을 수동적으로 변화시키는 방법에 의해 계를 안정화하는 수동제어에 관한 연구를 하였다. Morgul[12]은 보의 진동을 안정화하는 경계제어 법칙(boundary control law)을 제안하였고, Laussy와 2인[13]은 회전하는 보시스템의 안정한 경계 피드백 제어법칙을 제안하고, 보의 진동이 지수적으로 감소함을 보였다. Lee와 Mote[14]는 길이방향 이동현계의 경계제어법으로 시변경계에 의한 힘 제어방법을 제안하였으며, 현의 진동에너지를 소산시키는 최적의 제어법칙을 유도하였다.

Fung의 2인[15][16]은 길이방향으로 이동하는 현을 선형 및 비선형으로 모델링하고 작동기의 동역학이 고려된 경계제어 법칙을 유도하였다. Lee와 Mote[17]는 길이방향으로 이동하고 장력을 가진 오일러-베르누이 보(Euler-Bernoulli beam)의 횡방향 진동(transverse vibration)을 경계에서의 능동 및 수동 감쇠기로 제어하였으며, Li와 Rahn[18]과 Li와 2인[19]은 작동기를 중심으로 제어되는 부분과 제어되지 않는 부분으로 구성된 길이방향으로 이동하는 현과 보에 대한 진동제어를 연구하였다. Fard와 Sagatun[20]은 경계제어를 사용함으로써 진동하는 보를 지수적으로 안정화 시킬 수 있음을 보였다.

길이방향으로 이동하는 시스템은 제어 대상물과 시스템의 특징에 따라 현, 벨트, 보로 모델링 할 수가 있다. 본 논문에서는 산업기계 및 생산가공 현장에서 쉽게 발견할 수 있는 길이방향으로 이동하는 보시스템의 횡진동을 제어하고자 한다. 이 시스템은 일정한 속도로 운동하므로 운동방정식은 질량 변화가 있는 시스템에 대한 해밀턴 원리(Hamilton's principle)[21]를 사용하여 유도한다. 본 논문에서 유도된 운동방정식은 비선형 편미분방정식(nonlinear partial differential equation)이며, 이 비선형 보시스템의 횡진동을 제어하기 위하여 경계제어법으로 시변경계에 의한 힘제어 방법과 동시에 작동기의 감쇠를 설계하도록 한다. 본 논문에서는 하나의 센서와 작동기의 감쇠를 이용하여 보의 횡진동을 지수적으로 감소시킬 수 있다는 것을 보인다.

길이방향으로 이동하는 보시스템에 대한 지금까지의 연구는 해석을 쉽게 하기 위해 운동방정식을 선형으로 모델링하였고 작동기의 동역학은 고려되지 않았으며 선형 보방정식의 경우 2개 이상의 센서가 필요하였다. 본 논문에서는 비선형 보방정식에 대하여 작동기의 동역학을 고려한 경계제어 법칙을 유도하며 유도된 제어법칙을 적용하기 위해서는 하나의 센서만이 필요하고 부가적으로 작동기의 감쇠계수(damping coefficient)를 설계하도록 되어있다.

논문접수 : 2002. 5. 30., 채택확정 : 2002. 12. 20.

최지윤 : 부산대학교 지능기계공학과(chum@pusan.ac.kr)

홍금식 : 부산대학교 기계공학부(kshong@pusan.ac.kr)

※ 이 연구는 한국과학재단 지역대학 우수과학자 지원연구사업(과제번호 : R05-2001-000-01083-0)지원에 의해 수행되었습니다.

본 논문의 구성은 다음과 같다. 2절에서는 질량변화가 있는 시스템에 대한 해밀턴 원리를 사용하여 이동하는 보시스템의 운동방정식을 유도하고, 3절에서는 이 시스템의 횡진동을 안정화 시킬 수 있는 제어법칙을 유도함과 함께, 이 제어법칙은 보의 횡방향 변위를 지수적으로 영으로 감소시킨다는 것을 보인다. 4절에서는 3절에서 유도된 제어법칙을 적용하는 방법에 대해 소개하고, 그 제어법칙의 효율성을 시뮬레이션을 통하여 5절에서 검증하기로 한다. 마지막으로 6절에서는 이 결과를 요약하고 결론을 맺는다.

II. 운동방정식의 유도

그림 1은 두 지지대 사이를 일정한 속도로 이동하는 보의 개략도이다. 좌측경계는 고정되어 있고 우측경계는 작동기가 부착되어 수직방향으로 움직일 수 있게 되어 있다. 그림 1에서  $t$ 는 시간,  $x$ 는 보가 이동하는 방향으로의 공간좌표,  $v$ 는 보의 이동속도,  $L$ 은 양단 지지대 사이의 거리,  $w(x,t)$ 는 보의 횡방향 변위를 나타낸다. 임의의  $x$  위치에서의 보의 속도는 다음과 같다.

$$\vec{v} = v\mathbf{i} + \frac{dw(x,t)}{dt} \mathbf{j} = v\mathbf{i} + \{w_t(x,t) + vw_x(x,t)\} \mathbf{j} \quad (1)$$

여기서  $(\cdot)_t = \partial(\cdot)/\partial t$ ,  $(\cdot)_x = \partial(\cdot)/\partial x$ 를 나타낸다. 길이 방향으로 이동하는 보의 운동방정식은 질량변화가 있는 해밀턴 원리[21]를 이용하여 유도할 수 있으며 관계식은 다음과 같다.

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (T - U + W_{n.c.} + W_{r.b.}) dt = 0 \quad (2)$$

(2)에서  $T$ 는 운동에너지(kinetic energy),  $U$ 는 위치에너지(potential energy),  $W_{n.c.}$ 는 비보존력에 의한 일(non-conservative work),  $W_{r.b.}$ 는 우측경계에서의 가상 운동량 수송(virtual momentum transport)이다.

작동기를 포함하는 전체시스템의 운동에너지는

$$T = \frac{\rho A}{2} \int_0^L \{v^2 + (w_t + vw_x)^2\} dx + \frac{1}{2} m w_t^2(L,t) \quad (3)$$

이고,  $\rho$ 는 단위길이당 보의 질량,  $A$ 는 보의 단면적,  $m$ 은 작동기의 질량을 나타낸다. 위치에너지는

$$U = \int_0^L \left\{ P_0 \epsilon_x + \frac{EA}{2} \epsilon_x^2 + \frac{EI}{2} w_{xx}^2 \right\} dx \quad (4)$$

이고,  $P_0$ 는 장력,  $E$ 는 탄성계수,  $I$ 는 보 단면의 관성모멘트,  $\epsilon_x$ 는 변형률(strain)을 나타낸다.

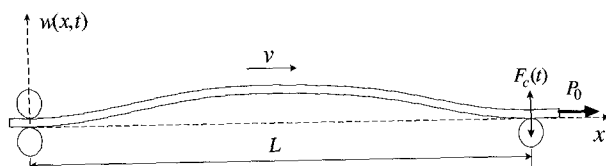


그림 1. 길이방향으로 이동하는 장력을 가진 보.  
Fig. 1. A schematic of an axially translating tensioned beam.

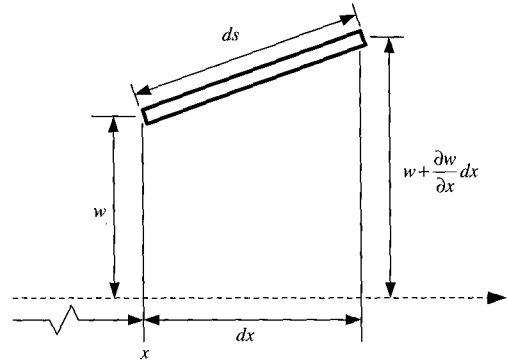


그림 2. 유연한 재료에 대한 변형관계.  
Fig. 2. The strain relationship for a flexible material.

이제 그림 2와 같이 길이가  $dx$ 인 보의 미소요소가 장력  $P_0$ 의 영향으로 길이가  $ds$ 로 변화한 경우,  $\epsilon_x$ 는 근사화하여 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{ds - dx}{dx} = \frac{\left[ dx^2 + \left( \frac{\partial w(x,t)}{\partial x} dx \right)^2 \right]^{1/2} - dx}{dx} \\ &= \left[ 1 + \left( \frac{\partial w(x,t)}{\partial x} \right)^2 \right]^{1/2} - 1 \cong \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w(x,t)}{\partial x} \right)^2 \end{aligned} \quad (5)$$

(5)는 보의 기울기가 작을 때 유용한 식이다. 미소요소의 길이가  $ds$ 로 변화한 경우 (4)에서 단면적  $A$ 도  $A + dA$ 로 나타내지만  $dA \times \epsilon_x^2 \cong 0$ 이므로 단면적  $A$ 를 상수로 나타낼 수 있다. (5)를 사용하면 (4)는 다음과 같이 다시 쓸 수 있다.

$$U = \int_0^L \left\{ \frac{P_0}{2} w_x^2 + \frac{EA}{8} w_x^4 + \frac{EI}{2} w_{xx}^2 \right\} dx \quad (6)$$

해밀턴의 원리를 적용하기 위하여 (3)과 (6)에 대해 변분(variation)을 취하면 다음과 같다.

$$\delta T = \rho A \int_0^L (w_t + vw_x) \delta w_t + v \delta w_x dx + m w_t \delta w_t(L,t) \quad (7)$$

$$\delta U = \int_0^L \left\{ P_0 w_x \delta w_x + \frac{EA}{2} w_x^3 \delta w_x + EI w_{xx} \delta w_{xx} \right\} dx \quad (8)$$

비보존력에 의한 가상일과 우측경계에서의 가상 운동량 수송에 대한 변분은 다음과 같다.

$$\delta W_{n.c.} = F_c(t) \delta w(L,t) - d_c w_t(L,t) \delta w(L,t) \quad (9)$$

$$\delta W_{r.b.} = -\rho A v \{w_t(L,t) + vw_x(L,t)\} \delta w(L,t) \quad (10)$$

(9)에서  $F_c(t)$ 는 제어력(control force)을 나타내고  $d_c$ 는 작동기의 감쇠계수이다. (7)-(10)을 (2)에 대입함으로써 운동방정식을 구할 수 있다. 유도된 운동방정식은

$$\rho A (w_{tt} + 2vw_{xt} + v^2 w_{xx}) - \left( P_0 + \frac{3EA}{2} w_x^2 \right) w_{xx} + EI w_{xxxx} = 0 \quad (11)$$

이고 경계조건은

$$w(0,t) = 0, w_x(0,t) = 0, w_{xx}(L,t) = 0, \quad (12)$$

$$mw_{tt}(L,t) + d_c w_t(L,t) + P_0 w_x(L,t) + \frac{EA}{2} w_x^3(L,t) - EI w_{xxx}(L,t) = F_c \quad (13)$$

이다. (11)은 길이방향으로 이동하는 보의 운동방정식으로 비선형 편미분방정식이며, (13)은 우측경계에서의 운동방정식이다.

길이방향으로 이동하는 보의 선형 운동방정식은

$$\rho A (w_{tt} + 2vw_{xt} + v^2 w_{xx}) - P_0 w_{xx} + EI w_{xxxx} = 0 \quad (14)$$

으로 표현되며 이동속도는 불안정 발산하지 않기 위하여 다음과 같이 임계속도(critical speed) 이내의 값을 가져야 한다 [17].

$$0 < v < v_{cr} = \sqrt{\frac{P_0}{\rho A}} \quad (15)$$

따라서 본 논문에서도 (11)로 표현되는 비선형 보방정식에서의 임계속도를 선형 보방정식에서의 임계속도(15)와 같다고 가정한다.

### III. 경계제어법칙의 유도

본 논문의 목적은 경계조건 (12), (13)을 만족하고 (11)로 표현되는 비선형 보방정식의 진동을 안정화 할 수 있는 제어기를 설계하는데 있다. 여기서는 전체 기계적에너지(mechanical energy)를 Lyapunov 함수후보로 선정하고 이 함수의 시간에 대한 미분이 음이 되게 하는 제어법칙을 유도한다. 작동기를 제외한 이 시스템의 기계적에너지는 다음과 같다.

$$E_{total}(t) = \frac{\rho A}{2} \int_0^L (w_t + vw_x)^2 dx + \frac{P_0}{2} \int_0^L w_x^2 dx + \frac{EA}{8} \int_0^L w_x^4 dx + \frac{EI}{2} \int_0^L w_{xx}^2 dx \quad (16)$$

**보조정리 1 :** (16)과 다음은 등가의 식이다.

$$E_{eq} = \alpha \left[ \frac{\rho A}{2} \int_0^L (w_t + vw_x)^2 dx + \frac{P_0}{2} \int_0^L w_x^2 dx + \frac{EA}{8} \int_0^L w_x^4 dx + \frac{EI}{2} \int_0^L w_{xx}^2 dx \right] + \beta \rho A \int_0^L x w_x (w_t + vw_x) dx \quad (17)$$

즉, 다음이 성립한다.

$$(\alpha - \beta \beta_1) E_{total} \leq E_{eq} \leq (\alpha + \beta \beta_1) E_{total} \quad (18)$$

여기서

$$\alpha, \beta, \beta_1 > 0, \beta \leq \frac{\alpha}{\beta_1} \quad (19)$$

이다.

**증명 :** (17)의 마지막 항은 다음의 부등식을 만족한다.

$$\begin{aligned} & \rho A \int_0^L x w_x (w_t + vw_x) dx \\ & \leq \frac{\rho AL}{2} \left[ \int_0^L w_x^2 dx + \int_0^L (w_t + vw_x)^2 dx \right] \\ & \leq L \left[ \frac{\rho A}{P_0} \cdot \frac{P_0}{2} \int_0^L w_x^2 dx + \frac{\rho A}{2} \int_0^L (w_t + vw_x)^2 dx \right] \\ & \leq L \cdot \max \left[ 1, \frac{\rho A}{P_0} \right] \cdot E_{total} = \beta_1 \cdot E_{total} \end{aligned} \quad (20)$$

여기서

$$\beta_1 = L \cdot \max \left[ 1, \frac{\rho A}{P_0} \right] \quad (21)$$

이다. (20)을 (17)에 대입하면,

$$E_{eq}(t) \leq \alpha \cdot E_{total} + \beta \beta_1 \cdot E_{total} = (\alpha + \beta \beta_1) E_{total} \quad (22)$$

이 얻어진다. 같은 방법으로 하면, (18)의 좌측 부등호도 증명된다. ■

보조정리 1을 이용하여 다음과 같이 Lyapunov 함수후보를 선정한다.

$$V(t) = V_{BE} + V_{AE} \quad (23)$$

여기서  $V_{BE} = E_{eq}$  이고,

$$V_{AE} = \frac{m}{\xi} \left\{ \xi w_t(L,t) + \tau w_x(L,t) \right\}^2 \quad (24)$$

이다.

**정리 :** 우측경계 제어력  $F_c(t)$ 와 작동기의 감쇠계수  $d_c$ 를 다음과 같이 두자.

$$F_c(t) = -K w_x(L,t), \quad (25a)$$

$$d_c = \frac{\beta \rho AL v}{\alpha v + \beta L} = \frac{\beta \rho AL}{\alpha + \beta L/v} \quad (25b)$$

여기서

$$K = \frac{m(\alpha v + \beta L)}{\alpha}, \quad (26a)$$

$$\alpha > 0, 0 < \beta < \min \left[ \frac{v}{L} \alpha, \frac{\alpha}{\beta_1} \right] \quad (26b)$$

이다. 그러면 운동방정식 (11)과 경계조건 (12), (13)을 만족하는 (23)의  $V(t)$ 는 다음을 만족한다.

$$\dot{V}(t) \leq V_0 e^{-\lambda t} \quad (27)$$

여기서  $V_0 = V(0)$  이고,

$$\begin{aligned} \lambda = \min & \left[ \frac{3\beta}{\alpha(\alpha + \beta \beta_1)}, \frac{\beta(P_0 - \rho Av^2)}{2\alpha P_0(\alpha + \beta \beta_1)}, \frac{\beta(P_0 - \rho Av^2)}{4\alpha \rho Av^2(\alpha + \beta \beta_1)}, \right. \\ & \left. \frac{\alpha \beta L(P_0 - \rho Av^2)}{2m(\alpha v + \beta L)^2}, \frac{\beta \rho AL \xi}{m \alpha} \left\{ \frac{\alpha v}{\alpha v + \beta L} - \frac{1}{2} \right\} \right] \end{aligned} \quad (28)$$

이다.

정리를 증명하기에 앞서 다음의 두 보조정리가 필요하다.

**보조정리 2 :** (23)은 다음 부등식을 만족한다.

$$k_1 \left[ E_{total} + \frac{m}{\xi} \{ \xi w_t(L,t) + \tau w_x(L,t) \}^2 \right] \leq V(t) \\ \leq k_2 \left[ E_{total} + \frac{m}{\xi} \{ \xi w_t(L,t) + \tau w_x(L,t) \}^2 \right] \quad (29)$$

여기서

$$k_1 = \min(\alpha - \beta\beta_1, 1) > 0, \quad k_2 = \max(\alpha + \beta\beta_1, 1) > 0 \quad (30)$$

이다.

**증명 :** 보조정리 1의 결과로부터 다음이 성립한다.

$$(\alpha - \beta\beta_1)E_{total} \leq V_{BE} \leq (\alpha + \beta\beta_1)E_{total}. \quad (31)$$

(31)에  $V_{AE}$ 를 더하면,

$$(\alpha - \beta\beta_1)E_{total} + \frac{m}{\xi} \{ \xi w_t(L,t) + \tau w_x(L,t) \}^2 \leq V_{BE} + V_{AE} \\ \leq (\alpha + \beta\beta_1)E_{total} + \frac{m}{\xi} \{ \xi w_t(L,t) + \tau w_x(L,t) \}^2$$

이므로 다음의 부등식이 성립한다.

$$\min(\alpha - \beta\beta_1, 1) \left[ E_{total} + \frac{m}{\xi} \{ \xi w_t(L,t) + \tau w_x(L,t) \}^2 \right] \leq V(t) \\ \leq \max(\alpha + \beta\beta_1, 1) \left[ E_{total} + \frac{m}{\xi} \{ \xi w_t(L,t) + \tau w_x(L,t) \}^2 \right]. \quad (32)$$

따라서 보조정리 2가 증명되었다. ■

제어법칙을 유도하기 위해 (23)을 시간에 대하여 전미분(total derivative)을 수행한다. (23)의  $V_{BE}$ 는 등가의 에너지식이므로  $V_{BE}$ 의 시간 변화율은 다음의 식으로 표현된다.

$$\frac{d}{dt} V_{BE} = \frac{\partial}{\partial t} V_{BE} + v \tilde{V}_{BE} \Big|_0^L \quad (33)$$

여기서

$$\tilde{V}_{BE} = \alpha \left[ \frac{\rho A}{2} (w_t + v w_x)^2 + \frac{P_0}{2} w_x^2 + \frac{EA}{8} w_x^4 + \frac{EI}{2} w_{xx}^2 \right] \quad (34)$$

이다. 즉, 이 시스템은 양쪽경계에서 질량의 유입과 유출이 있는 시스템이므로 0에서 L까지의 경계를 고려할 때 전체 시스템의 에너지 변화율  $dV_{BE}/dt$ 는 국부 시간 변화율  $\partial V_{BE}/\partial t$ 와 경계에서 유입, 유출되는 에너지 유속(energy flux)  $v \tilde{V}_{BE} \Big|_0^L$ 의 합으로 표현된다. 따라서 (33)은 다음과 같다.

$$\frac{d}{dt} V_{BE} = \frac{\partial}{\partial t} V_{BE} + v \tilde{V}_{BE} \Big|_0^L \\ = \alpha \left[ \rho A \int_0^L (w_t + v w_x)(w_{tt} + v w_{xt}) dx + EI \int_0^L w_{xx} w_{xxx} dx \right. \\ \left. + P_0 \int_0^L w_x w_{xt} dx + \frac{EA}{2} \int_0^L w_x^3 w_{xt} dx \right] \\ + \beta \rho A \int_0^L [x w_{xt} (w_t + v w_x) + x w_x (w_{tt} + v w_{xt})] dx$$

$$+ v \alpha \left[ \frac{\rho A}{2} (w_t + v w_x)^2 + \frac{P_0}{2} w_x^2 + \frac{EA}{8} w_x^4 + \frac{EI}{2} w_{xx}^2 \right] \Big|_0^L \\ + v \beta \rho A \int_0^L x w_x (w_t + v w_x) \Big|_0^L \\ = \alpha \left[ \rho A \int_0^L (w_t + v w_x)(w_{tt} + v w_{xt}) dx + EI \int_0^L w_{xx} w_{xxx} dx \right. \\ \left. + P_0 \int_0^L w_x w_{xt} dx + \frac{EA}{2} \int_0^L w_x^3 w_{xt} dx \right] \\ + \beta \rho A \int_0^L [x w_{xt} (w_t + v w_x) + x w_x (w_{tt} + v w_{xt})] dx \\ + \alpha \left[ \rho A \int_0^L (w_t + v w_x)(w_{xt} + v w_{xx}) dx + EI \int_0^L w_{xx} w_{xxx} dx \right. \\ \left. + P_0 \int_0^L w_x w_{xx} dx + \frac{EA}{2} \int_0^L w_x^3 w_{xx} dx \right] \\ + \beta \rho A \int_0^L [w_x w_t + v w_x^2 + x w_{xx} (w_t + v w_x) \\ + x w_x (w_{xt} + v w_{xx})] dx. \quad (35)$$

(35)에서  $\tilde{V}_{BE} \Big|_0^L = \partial V_{BE} / \partial x$  이므로  $dV(t)/dt = \partial V_{BE} / \partial t + v \partial V_{BE} / \partial x$ 이 사용되었다. 이 시스템의 운동방정식 (11)을 이용하면 (35)는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\frac{d}{dt} V_{BE} = \alpha \left[ \rho A \int_0^L (w_t + v w_x)(w_{tt} + 2v w_{xt} + v^2 w_{xx}) dx \right. \\ \left. + EI \int_0^L (w_{xx} w_{xxx} + v w_{xx} w_{xxx}) dx \right. \\ \left. + P_0 \int_0^L (w_x w_{xt} + v w_x w_{xx}) dx + \frac{EA}{2} \int_0^L (w_x^3 w_{xt} + v w_x^3 w_{xx}) \right] \\ + \beta \rho A \int_0^L (x w_{xt} w_t + v x w_{xt} w_x + v^2 x w_{xx} w_x + v x w_{xx} w_t) dx \\ + \beta \rho A \int_0^L (w_x w_t + v^2 w_x^2) dx \\ + \beta \rho A \int_0^L x w_x (w_{tt} + 2v w_{xt} + v^2 w_{xx}) dx \\ = \alpha \left[ \int_0^L (w_t + v w_x) \left\{ P_0 + \frac{3EA}{2} w_x^2 \right\} w_{xx} - EI w_{xxxx} \right] dx \\ + EI \int_0^L w_{xx} w_{xxx} dx + EI v \int_0^L w_{xx} w_{xxx} dx \\ + P_0 \int_0^L w_x w_{xt} dx + P_0 v \int_0^L w_x w_{xx} dx + \frac{EA}{2} \int_0^L w_x^3 w_{xt} dx \\ + \frac{EA v}{2} \int_0^L w_x^3 w_{xx} dx + \beta \rho A \int_0^L x w_{xt} w_t dx \\ + \beta \rho A \int_0^L x v^2 w_x w_{xx} dx + \beta \rho A \int_0^L v^2 w_x^2 dx \\ + \beta \rho A \int_0^L (x v w_{xt} w_x + x v w_{xx} w_t + v w_x w_t) dx \\ + \beta P_0 \int_0^L x w_x w_{xx} dx \\ + \frac{3\beta EA}{2} \int_0^L x w_x^3 w_{xx} dx - \beta EI \int_0^L x w_x w_{xxxx} dx. \quad (36)$$

**보조정리 3 :**  $w(x,t)$ 가 경계조건 (12)를 만족하면 다음의 식들이 성립한다.

$$P_0 \int_0^L (w_t w_{xx} + w_x w_{xt}) dx = P_0 [w_t w_x]_0^L \\ = P_0 w_t(L,t) w_x(L,t), \quad (37a) \\ -EI \int_0^L w_t w_{xxxx} dx + EI \int_0^L w_{xx} w_{xxx} dx \\ = -EI [w_{xxx} w_t]_0^L + EI [w_{xx} w_{xt}]_0^L$$

$$= -EIw_{xxx}(L, t)w_t(L, t), \quad (37b)$$

$$\begin{aligned} \frac{EA}{2} \int_0^L (w_x^3 w_{xx} + 3w_x w_x^2 w_{xx}) dx \\ = \frac{EA}{2} [w_x^3 w_t]_0^L = \frac{EA}{2} w_x^3(L, t)w_t(L, t), \end{aligned} \quad (37c)$$

$$2EA \int_0^L w_x^3 w_{xx} dx = 2EA \int_0^L \left[ \frac{1}{4} w_x^4 \right]_0^L = \frac{EA}{2} w_x^4(L, t), \quad (37d)$$

$$2P_0 \int_0^L w_x w_{xx} dx = P_0 [w_x^2]_0^L = P_0 w_x^2(L, t), \quad (37e)$$

$$\begin{aligned} -EI \int_0^L w_x w_{xxxx} dx \\ = -EI w_x(L, t)w_{xxx}(L, t) - \frac{EIv}{2} w_{xx}^2(0, t), \end{aligned} \quad (37f)$$

$$EI \int_0^L w_{xx} w_{xxxx} dx = \frac{EIv}{2} [w_{xx}^2]_0^L = -\frac{EIv}{2} w_{xx}^2(0, t), \quad (37g)$$

$$\beta \rho A \int_0^L x w_x w_t dx = \frac{\beta \rho AL}{2} w_t^2(L, t) - \frac{\beta \rho A}{2} \int_0^L w_t^2 dx, \quad (37h)$$

$$\begin{aligned} \beta \rho A \int_0^L x v^2 w_x w_{xx} dx \\ = \frac{\beta \rho AL v^2}{2} w_x^2(L, t) - \frac{\beta \rho A v^2}{2} \int_0^L w_x^2 dx, \end{aligned} \quad (37i)$$

$$\beta P_0 \int_0^L x w_x w_{xx} dx = \frac{\beta P_0 L}{2} w_x^2(L, t) - \frac{\beta P_0}{2} \int_0^L w_x^2 dx, \quad (37j)$$

$$\begin{aligned} \frac{3\beta EA}{2} \int_0^L x w_x^3 w_{xx} dx \\ = \frac{3\beta EAL}{8} w_x^4(L, t) - \frac{3\beta EA}{8} \int_0^L w_x^4 dx, \end{aligned} \quad (37k)$$

$$\begin{aligned} -\beta EI \int_0^L x w_x w_{xxxx} dx \\ = -\beta EIL w_x(L, t)w_{xxx}(L, t) - \frac{3\beta EI}{2} \int_0^L w_{xx}^2 dx, \end{aligned} \quad (37l)$$

$$\begin{aligned} \beta \rho A \int_0^L (xv w_x w_x + xv w_{xx} w_t + v w_x w_t) dx \\ = \beta \rho A v [xw_x w_t]_0^L = \beta \rho AL v w_x(L, t)w_t(L, t). \end{aligned} \quad (37m)$$

**증명 :** 위 식의 증명은 등호의 좌측 식들을 부분적분을 함으로써 구할 수 있으며 과정은 생략한다. ■  
(36)은 보조정리 3을 이용해서 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} V_{BE} = & \alpha [P_0 w_t(L, t)w_x(L, t) + \frac{EA}{2} w_x^3(L, t)w_t(L, t) \\ & + \frac{EA}{2} w_x^4(L, t) + P_0 v w_x^2(L, t) \\ & - EI v w_{xx}^2(0, t) - EI w_{xxx}(L, t) \{w_t(L, t) + v w_x(L, t)\}] \\ & - \frac{\beta \rho A}{2} \int_0^L w_t^2 dx - \frac{\beta}{2} (P_0 + \rho A v^2) \int_0^L w_x^2 dx \\ & - \frac{3\beta EA}{8} \int_0^L w_x^4 dx - \frac{3\beta EI}{2} \int_0^L w_{xx}^2 dx \\ & + \beta \rho AL v w_x(L, t)w_t(L, t) + \frac{\beta \rho AL}{2} w_t^2(L, t) \\ & + \frac{\beta L}{2} (P_0 + \rho A v^2) w_x^2(L, t) + \frac{3\beta EAL}{8} w_x^4(L, t) \\ & - \beta EIL w_x(L, t)w_{xxx}(L, t) + \beta \rho A v^2 \int_0^L w_x^2 dx. \end{aligned} \quad (38)$$

(24)의 시간에 대한 미분은 다음과 같다.

$$\frac{d}{dt} V_{AE} = \frac{2m}{\xi} \{ \xi w_t(L, t) + \tau w_x(L, t) \} \cdot \{ \xi w_u(L, t) + \tau w_{uu}(L, t) \}$$

$$\begin{aligned} = 2m\xi w_t(L, t) \cdot w_{tt}(L, t) + 2m\tau w_t(L, t) \cdot w_{xt}(L, t) \\ + 2m\tau w_x(L, t) \cdot w_{tu}(L, t) + \frac{2m\tau^2}{\xi} w_x(L, t) \cdot w_{xt}(L, t). \end{aligned} \quad (39)$$

(38), (39)로부터 (23)의 시간에 대한 전미분은 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} V(t) = & \frac{d}{dt} (V_{BE} + V_{AE}) \\ = & -\alpha EI v w_{xx}^2(0, t) - \frac{\beta \rho A}{2} \int_0^L w_t^2 dx - \frac{\beta (P_0 - \rho A v^2)}{2} \int_0^L w_x^2 dx \\ & - \frac{3\beta EA}{8} \int_0^L w_x^4 dx - \frac{3\beta EI}{2} \int_0^L w_{xx}^2 dx \\ & + \frac{4\alpha EA v + 3\beta EAL}{8} w_x^4(L, t) + \frac{\alpha EA}{2} w_x^3(L, t)w_t(L, t) \\ & + \left( P_0 \alpha v + \frac{\beta P_0 L}{2} + \frac{\beta \rho AL v^2}{2} \right) w_x^2(L, t) + \frac{\beta \rho AL}{2} w_t^2(L, t) \\ & + (P_0 \alpha + \beta \rho AL v) w_x(L, t)w_t(L, t) \\ & - EI w_{xxx}(L, t) \{ \alpha w_t(L, t) + (\alpha v + \beta L) w_x(L, t) \} \\ & + m w_{uu}(L, t) \{ 2\xi w_t(L, t) + 2\tau w_x(L, t) \} \\ & + 2m\tau w_t(L, t)w_{xt}(L, t) + \frac{2m\tau^2}{\xi} w_x(L, t)w_{xt}(L, t). \end{aligned} \quad (40)$$

(40)에 유측경계의 운동방정식 (13)을 대입하면 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} V(t) = & -\alpha EI v w_{xx}^2(0, t) - \frac{\beta \rho A}{2} \int_0^L w_t^2 dx \\ & - \frac{\beta (P_0 - \rho A v^2)}{2} \int_0^L w_x^2 dx - \frac{3\beta EA}{8} \int_0^L w_x^4 dx \\ & - \frac{3\beta EI}{2} \int_0^L w_{xx}^2 dx + \frac{4\alpha EA v + 3\beta EAL}{8} w_x^4(L, t) \\ & + \frac{\alpha EA}{2} w_x^3(L, t)w_t(L, t) \\ & + \left( P_0 \alpha v + \frac{\beta P_0 L}{2} + \frac{\beta \rho AL v^2}{2} \right) w_x^2(L, t) + \frac{\beta \rho AL}{2} w_t^2(L, t) \\ & + (P_0 \alpha + \beta \rho AL v) w_x(L, t)w_t(L, t) \\ & - EI w_{xxx}(L, t) \{ \alpha w_t(L, t) + (\alpha v + \beta L) w_x(L, t) \} \\ & + \{ 2\xi w_t(L, t) + 2\tau w_x(L, t) \} \cdot [F_c(t) - d_t w_t(L, t) - P_0 w_x(L, t) \\ & - \frac{EA}{2} w_x^3(L, t) + EI w_{xxx}(L, t)] \\ & + 2m \left\{ \tau w_t(L, t)w_{xt}(L, t) + \frac{\tau^2}{\xi} w_x(L, t) \cdot w_{xt}(L, t) \right\}. \end{aligned} \quad (41)$$

이제 앞의 정리를 증명할 수 있다.

**정리의 증명 :** (41)에서  $\xi = \alpha/2$ ,  $\tau = (\alpha v + \beta L)/2$  로 두면,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} V(t) = & -\alpha EI v w_{xx}^2(0, t) - \frac{\beta \rho A}{2} \int_0^L w_t^2 dx \\ & - \frac{\beta (P_0 - \rho A v^2)}{2} \int_0^L w_x^2 dx \\ & - \frac{3\beta EA}{8} \int_0^L w_x^4 dx - \frac{3\beta EI}{2} \int_0^L w_{xx}^2 dx \\ & + \frac{4\alpha EA v + 3\beta EAL}{8} w_x^4(L, t) + \frac{\alpha EA}{2} w_x^3(L, t)w_t(L, t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left( P_0 \alpha v + \frac{\beta P_0 L}{2} + \frac{\beta \rho A L v^2}{2} \right) w_x^2(L, t) + \frac{\beta \rho A L}{2} w_t^2(L, t) \\
& + (P_0 \alpha + \beta \rho A L v) w_x(L, t) w_t(L, t) \\
& + \left\{ \alpha w_t(L, t) + (\alpha v + \beta L) w_x(L, t) \right\} \\
& \times \left[ F_c(t) - d_c w_t(L, t) - P_0 w_x(L, t) - \frac{EA}{2} w_x^2(L, t) \right] \\
& + m \left\{ (\alpha v + \beta L) w_t(L, t) w_{xt}(L, t) \right. \\
& \left. + \frac{(\alpha v + \beta L)^2}{\alpha} w_x(L, t) w_{xt}(L, t) \right\} \quad (42)
\end{aligned}$$

이다. (42)에서 제어입력  $F_c(t)$  를  $-K w_{xt}(L, t)$  로 두고 계인  $K$  의 값을  $m(\alpha v + \beta L)/\alpha$  라 두면  $w_{xt}(L, t)$  의 항들을 모두 소거시킬 수 있으므로 다음을 얻는다.

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} V(t) & = -\alpha E I v w_{xx}^2(0, t) - \frac{\beta \rho A}{2} \int_0^L w_t^2 dx \\
& - \frac{\beta(P_0 - \rho A v^2)}{2} \int_0^L w_x^2 dx \\
& - \frac{3\beta EA}{8} \int_0^L w_x^4 dx - \frac{3\beta EI}{2} \int_0^L w_{xx}^2 dx \\
& - \frac{\beta EAL}{8} w_x^4(L, t) - \frac{\beta L}{2} (P_0 - \rho A v^2) w_x^2(L, t) \\
& + \left( \frac{\beta \rho A L}{2} - \alpha d_c \right) w_t^2(L, t) \\
& + \left\{ \beta \rho A L v - (\alpha v + \beta L) d_c \right\} w_x(L, t) w_t(L, t). \quad (43)
\end{aligned}$$

(15)를 만족하는  $v$  는  $P_0 > \rho A v^2$  을 만족하므로 (43)의 마지막 두 항을 제외하고는 모두 음이다. 따라서 다음 두 식을 만족하면 (43)의 모든 항은 항상 음이 된다.

$$\frac{\beta \rho A L}{2} - \alpha d_c < 0 \Leftrightarrow d_c > \frac{\beta \rho A L}{2\alpha}, \quad (44)$$

$$\beta \rho A L v - (\alpha v + \beta L) d_c = 0 \Leftrightarrow d_c = \frac{\beta \rho A L v}{\alpha v + \beta L} = \frac{\beta \rho A L}{\alpha + \beta L/v} \quad (45)$$

여기서 (44)와 (45)를 모두 만족하기 위해서는

$$0 < \beta \frac{L}{v} < \alpha \quad (46)$$

를 만족해야 하고,  $\beta$  는 또한 (19)를 만족해야 하므로

$$0 < \beta < \min \left[ \frac{v}{L} \alpha, \frac{\alpha}{\beta_1} \right] \quad (47)$$

이다. 따라서 Lyapunov 함수 후보  $V(t)$  의 시간에 대한 전미분 식은 다음과 같이 모든 계수가 음수인 식으로 표현된다.

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} V(t) & = -\alpha E I v w_{xx}^2(0, t) - \frac{\beta \rho A}{2} \int_0^L w_t^2 dx \\
& - \frac{\beta(P_0 - \rho A v^2)}{2} \int_0^L w_x^2 dx
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{3\beta EA}{8} \int_0^L w_x^4 dx - \frac{3\beta EI}{2} \int_0^L w_{xx}^2 dx \\
& - \frac{\beta EAL}{8} w_x^4(L, t) - \frac{\beta L}{2} (P_0 - \rho A v^2) w_x^2(L, t) \\
& - \beta \rho A L \left( \frac{\alpha v}{\alpha v + \beta L} - \frac{1}{2} \right) w_t^2(L, t) \quad (48)
\end{aligned}$$

여기서  $\alpha v/(\alpha v + \beta L) > 1/2$  이다. (48)은 다음과 같이 전개된다.

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} V(t) & = -\alpha E I v w_{xx}^2(0, t) - \frac{\beta \rho A}{2} \int_0^L w_t^2 dx \\
& - \frac{\beta(P_0 - \rho A v^2)}{4} \int_0^L w_x^2 dx \\
& - \frac{\beta(P_0 - \rho A v^2)}{4v^2} \int_0^L (v w_x)^2 dx - \frac{3\beta EA}{8} \int_0^L w_x^4 dx \\
& - \frac{3\beta EI}{2} \int_0^L w_{xx}^2 dx - \frac{\beta EAL}{8} w_x^4(L, t) \\
& - \frac{\beta L}{2} (P_0 - \rho A v^2) w_x^2(L, t) - \beta \rho A L \left( \frac{\alpha v}{\alpha v + \beta L} - \frac{1}{2} \right) w_t^2(L, t) \\
& \leq -\alpha E I v w_{xx}^2(0, t) - \frac{\beta(P_0 - \rho A v^2)}{4} \int_0^L w_x^2 dx \\
& - \frac{3\beta EA}{8} \int_0^L w_x^4 dx - \frac{3\beta EI}{2} \int_0^L w_{xx}^2 dx \\
& - \min \left[ \frac{\beta \rho A}{2}, \frac{\beta(P_0 - \rho A v^2)}{4v^2} \right] \left[ \int_0^L w_t^2 dx + \int_0^L (v w_x)^2 dx \right] \\
& - \frac{\beta EAL}{8} w_x^4(L, t) - \frac{\beta L}{2} (P_0 - \rho A v^2) w_x^2(L, t) \\
& - \beta \rho A L \left( \frac{\alpha v}{\alpha v + \beta L} - \frac{1}{2} \right) w_t^2(L, t).
\end{aligned}$$

여기서 부등식

$$-\int_0^L w_t^2 dx - \int_0^L (v w_x)^2 dx \leq -\frac{1}{2} \int_0^L (w_t + v w_x)^2 dx \quad (49)$$

을 이용하면 다음을 얻는다.

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} V(t) & \leq -\alpha E I v w_{xx}^2(0, t) - \frac{\beta(P_0 - \rho A v^2)}{4} \int_0^L w_x^2 dx \\
& - \frac{3\beta EA}{8} \int_0^L w_x^4 dx - \frac{3\beta EI}{2} \int_0^L w_{xx}^2 dx \\
& - \min \left[ \frac{\beta \rho A}{4}, \frac{\beta(P_0 - \rho A v^2)}{8v^2} \right] \left[ \int_0^L (w_t + v w_x)^2 dx \right] \\
& - \frac{\beta EAL}{8} w_x^4(L, t) - \frac{\beta L}{2} (P_0 - \rho A v^2) w_x^2(L, t) \\
& - \beta \rho A L \left( \frac{\alpha v}{\alpha v + \beta L} - \frac{1}{2} \right) w_t^2(L, t) \\
& \leq -\frac{3\beta}{\alpha} \frac{EA}{8} \int_0^L w_x^4 dx - \frac{3\beta}{\alpha} \frac{EI}{2} \int_0^L w_{xx}^2 dx \\
& - \frac{\beta(P_0 - \rho A v^2)}{2\alpha P_0} \alpha \frac{P_0}{2} \int_0^L w_x^2 dx \\
& - \min \left[ \frac{\beta}{2\alpha}, \frac{\beta(P_0 - \rho A v^2)}{4\alpha \rho A v^2} \right] \alpha \frac{\rho A}{2} \int_0^L (w_t + v w_x)^2 dx \\
& - \frac{2\beta L(P_0 - \rho A v^2)}{(\alpha v + \beta L)^2} \left( \frac{\alpha v + \beta L}{2} w_x \right)^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & -\frac{4\beta\rho AL}{\alpha^2} \left\{ \frac{\alpha v}{\alpha v + \beta L} - \frac{1}{2} \right\} \left( \frac{\alpha}{2} w_t \right)^2 \\
 & \leq -\min \left[ \frac{3\beta}{\alpha}, \frac{\beta(P_0 - \rho Av^2)}{2\alpha P_0}, \frac{\beta(P_0 - \rho Av^2)}{4\alpha\rho Av^2} \right] \\
 & \times \alpha \left[ \frac{EA}{8} \int_0^L w_x^4 dx + \frac{EI}{2} \int_0^L w_{xx}^2 dx + \frac{P_0}{2} \int_0^L w_x^2 dx \right. \\
 & \left. + \frac{\rho A}{2} \int_0^L (w_t + v w_x)^2 dx \right] \\
 & -\min \left[ \frac{\alpha\beta L(P_0 - \rho Av^2)}{2m(\alpha v + \beta L)^2}, \frac{\beta\rho AL}{m\alpha} \left\{ \frac{\alpha v}{\alpha v + \beta L} - \frac{1}{2} \right\} \right] \\
 & \times \frac{2m}{\alpha} \left\{ \frac{\alpha}{2} w_t(L,t) + \frac{\alpha v + \beta L}{2} w_x(L,t) \right\}^2. \tag{50}
 \end{aligned}$$

(17), (24), (31)을 이용하면 (50)은 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt} V(t) & \leq -\min \left[ \frac{3\beta}{\alpha}, \frac{\beta(P_0 - \rho Av^2)}{2\alpha P_0}, \frac{\beta(P_0 - \rho Av^2)}{4\alpha\rho Av^2} \right] \\
 & \times \frac{1}{\alpha + \beta\beta_1} V_{nk} \\
 & -\min \left[ \frac{\alpha\beta L(P_0 - \rho Av^2)}{2m(\alpha v + \beta L)^2}, \frac{\beta\rho AL}{m\alpha} \left\{ \frac{\alpha v}{\alpha v + \beta L} - \frac{1}{2} \right\} \right] \times V_{AE} \\
 & \leq -\min \left[ \frac{3\beta}{\alpha(\alpha + \beta\beta_1)}, \frac{\beta(P_0 - \rho Av^2)}{2\alpha P_0(\alpha + \beta\beta_1)}, \frac{\beta(P_0 - \rho Av^2)}{4\alpha\rho Av^2(\alpha + \beta\beta_1)}, \right. \\
 & \left. \frac{\alpha\beta L(P_0 - \rho Av^2)}{2m(\alpha v + \beta L)^2}, \frac{\beta\rho AL\xi}{m\alpha} \left\{ \frac{\alpha v}{\alpha v + \beta L} - \frac{1}{2} \right\} \right] \times (V_{nk} + V_{AE}) \\
 & \triangleq -\lambda V(t). \tag{51}
 \end{aligned}$$

따라서 정리가 증명되었다. ■

(27), (29), (30)으로부터

$$E_{total} \leq \frac{1}{\min(\alpha - \beta\beta_1, 1)} V(t) \leq V_0 e^{-\lambda t} \tag{52}$$

이다. 따라서 시스템의 전체 기계적 에너지(16)에서 표현되는 시스템의 모든 상태 변수들은 시간이 지남에 따라 지수적으로 영으로 수렴함을 알 수 있다.

#### IV. 우측 경계제어법칙의 적용

(25a,b)의 적용은 우측경계에서의 제어력  $F_c(t)$ 와 작동기의 감쇠계수  $d_c$ 를 필요로 한다. (25b)의 감쇠계수는 구체적인 값으로 주어져 있으므로 적용하기엔 불가능하다. 따라서 본 절에서는 감쇠계수를 적용하는 방법에 대해 설명한다.

(21)과 (26b)로부터  $\beta$ 는 다음과 같이 선택되어질 수 있다.

$$\beta = k_3 \alpha, \quad 0 < k_3 < \min \left\{ \frac{v}{L}, \frac{1}{\beta_1} \right\}. \tag{53}$$

(53)을 (25b)에 대입하면,

$$d_c = \frac{k_3 \rho AL v}{v + k_3 L} \tag{54}$$

이다. (54)는  $k_3 > 0$ 인 구역에서 증가함수(increasing function)이므로  $k_3$ 가 (53)의 범위를 가질 때 감쇠계수  $d_c$ 의 범위는 다음과 같다.

$$0 < d_c < \frac{M \rho AL v}{v + ML} \tag{55}$$

여기서  $M = \min\{v/L, 1/\beta_1\}$ 이다. (55)의 우측 항은 모두 알고 있는 값들이다. 따라서 감쇠계수의 범위는 (55)의 범위를 갖도록 설계되어야 하고 감쇠계수의 값이 정해지면  $\alpha$ 는 임의의 상수값으로 두고  $\beta$ 는 (53)의 범위에서 정할 수 있으므로 제어기의 게인값 (26a)가 정해진다. (25a)에서 각 변화율  $w_{xt}(L,t)$ 는 매 시간 간격마다 측정된  $w_x(L,t)$ 의 값을 후방차분(backwards differencing)을 함으로써  $w_{xt}(L,t)$ 의 값을 계산해 낸다.

#### V. 시뮬레이션 결과

제안된 우측경계 제어법칙 (25a,b)의 성능을 확인하기 위하여 유한차분법(finite difference scheme)을 사용하여 시뮬레이션을 수행한다. 시뮬레이션에 사용된 변수들은 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
 E & = 2 \times 10^{11} \text{ N/m}^2, \quad A = 1.4 \times 0.0045 \text{ m}^2, \quad T_0 = 9,800 \text{ kN}, \\
 \rho & = 7,850 \text{ kg/m}^3, \quad v_0 = 1.67 \text{ m/s}, \quad L = 17.5 \text{ m}, \\
 m & = 5 \text{ kg}. \tag{56}
 \end{aligned}$$

$\alpha$ 를 임의의 양수 1로 두고 (56)을 (55)에 대입하면  $d_c$ 의 범위가 다음과 같이 구해진다.

$$0 < d_c < 30.93. \tag{57}$$

$d_c$ 를 임의로 15라 두자. 그러면 (53)과 (54)로부터  $\beta$ 의 값이 다음과 같이 구해진다.

$$\begin{aligned}
 \beta & = k_3 \alpha = v \alpha / (\rho AL v / d_c - L) \\
 & = 1.67 \times 1 / (7850 \times 1.4 \times 0.0045 \times 17.5 \times 1.67 / 15 - 17.5) \\
 & = 0.02. \tag{58}
 \end{aligned}$$

따라서 (26a)의 제어게인은 다음과 같다.

$$K = 5(1.67 + 0.021 \times 17.5) / 1 = 10.19. \tag{59}$$

초기 조건으로

$$w(x,0) = 2 \sin(3\pi) \text{ cm}, \quad w_t(x,0) = 0 \text{ m/s} \tag{60}$$

으로 두고, (56)-(59)의 값을 이용하여 20초 동안 시뮬레이션을 하였다. 그림 3과 그림 4는 각각  $L/2$  지점에서의 횡방향 변위와 우측경계에서의 제어입력을 나타내었다. 그림 3에서와 같이 본 논문에서 설계한 제어기는 6초 이내에 진동을 소멸시켰다. 그림 5는 시간에 따른 시스템의 에너지를 나타내었으며 시간이 지남에 따라 에너지는 지수적으로 감소함을 알 수 있다.

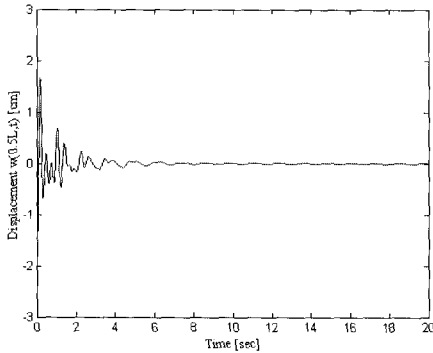


그림 3.  $K = 10.19$ ,  $d_c = 15$  일 때  $x = L/2$ 에서의 횡방향 변위.  
Fig. 3. Transversal displacement  $w(L/2, t)$  with control gain  $K = 10.19$  and damping coefficient  $d_c = 15$ .

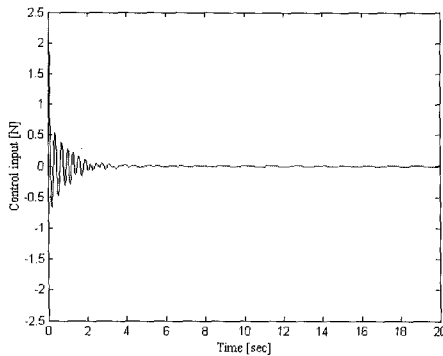


그림 4.  $K = 10.19$ ,  $d_c = 15$  일 때의 제어입력.  
Fig. 4. Control input with control gain  $K = 10.19$  and damping coefficient  $d_c = 15$ .

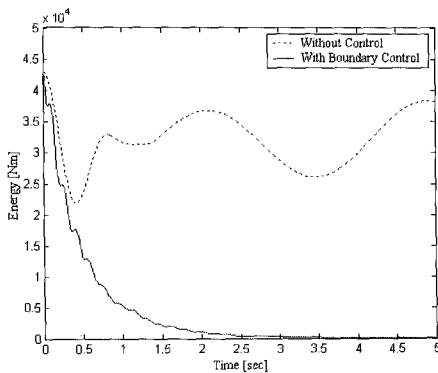


그림 5.  $K = 10.19$ ,  $d_c = 15$  일 때의 전체에너지의 감소.  
Fig. 5. Decay of the total energy with control gain  $K = 10.19$  and damping coefficient  $d_c = 15$ .

**VI. 결론**

본 논문에서는 길이방향으로 이동하는 보의 진동을 줄이기 위한 우측경계 제어법칙을 제안하였다. Lyapunov방법으로 설계된 경계제어법칙은 우측경계에서의 제어력과 작동기의 감쇠계수를 결정하도록 하였다. 또한 제어법칙은 전체 기계적 에너지를 지수적으로 감소시킨다는 것을 보였다. 시뮬레이션 결과는 본 논문에서 설계된 제어법칙의 효율성을 증명한다.

**참고문헌**

- [1] G. F. Carrier, "On the nonlinear vibration problem of the elastic string," *Quarterly of Applied Mathematics*, Vol. 3, pp. 157-165, 1945.
- [2] V. A. Bapat and P. Srinivasan, "Nonlinear transverse oscillations in traveling strings by the method of harmonic balance," *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 34, pp. 775-777, 1967.
- [3] J. A. Wickert and C. D. Mote, "Classical vibration analysis of axially moving continua," *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 57, pp. 738-744, 1990.
- [4] J. A. Wickert, "Non-linear vibration of a traveling tensioned beam," *International Journal of Non-Linear Mechanics*, Vol. 27, No. 3, pp. 503-517, 1992.
- [5] K. Oshima, T. Takigami, and Y. Hayakawa, "Robust vibration control of a cantilever beam using self-sensing actuator," *JSME International Journal Series C*, Vol. 40, No. 4, pp. 681-687, 1997.
- [6] F. Pellicano and F. Zirilli, "Boundary layers and non-linear vibrations in an axially moving beam," *International Journal of Non-Linear Mechanics*, Vol. 33, No. 4, pp. 691-694, 1998.
- [7] S. M. Shahruz, "Boundary control of the axially moving kirchhoff string," *Automatica*, Vol. 34, No. 10, pp. 273-1277, 1998.
- [8] S. M. Shahruz, "Boundary control of a non-linear axially moving string," *International Journal of Robust Nonlinear Control*, Vol. 10, pp. 17-25, 2000.
- [9] J. C. Oostveen and R. F. Curtain, "Robustly stabilization controllers for dissipative infinite-dimensional systems with collocated actuators and sensor," *Automatica*, Vol. 36, No. 3, pp. 337-348, 2000.
- [10] C. D. Mote, "A study of band saw vibration," *Journal of the Franklin Institute*, Vol. 279, pp. 430-444, 1965.
- [11] J. A. Wickert and C. D. Mote, "On the energetics of axially moving continua," *Journal of Acoustic Society of America*, Vol. 85, No. 3, pp. 1365-1368, 1988.
- [12] O. Morgul, "Dynamics boundary control of a Euler-bernoulli beam," *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 37, No. 5, pp. 639-642, 1992.
- [13] H. Laousy, C. Z. Xu, and G. Sallet, "Boundary feedback stabilization of a rotating body-beam system," *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 41, No. 2, pp. 241-244, 1996.
- [14] S. Y. Lee and C. D. Mote, "Vibration control of an axially moving string by boundary control," *ASME Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, Vol. 118, No. 1, pp. 66-74, 1996.
- [15] R. F. Fung, J. W. Wu, and S. L. Wu, "Exponential stability of an axially moving string by linear boundary feedback," *Automatica*, Vol. 35, No. 1, pp. 177-181, 1999.
- [16] R. F. Fung, J. W. Wu, and S. L. Wu, "Stabilization of an axially moving string by non-linear boundary feedback," *ASME Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, Vol. 121, No. 1, pp. 117-120, 1999.
- [17] S. Y. Lee and C. D. Mote, "Wave characteristics and vibration control of translating beams by optimal boundary damping," *Journal of Vibration and Acoustics*, Vol. 121, No. 1, pp. 18-25, 1999.



[18] Y. Li and C. D. Rahn, "Adaptive vibration isolation for axially moving beams," *IEEE/ASME Transactions on Mechatronics*, Vol. 5, No. 4, pp. 419-428, 2000.

[19] Y. Li, D. Aron, and C. D. Rahn, "Axially vibration isolation for axially moving strings: theory and experiment," *Automatica*, Vol. 38, No. 3, pp. 379-389, 2002.

[20] M. P. Fard and S. I. Sagatun, "Exponential stabilization of a transversely vibrating beam via boundary control," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 240, No. 4, pp. 613-622, 2001.

[21] D. B. McIver, "Hamilton's principle for systems of changing mass," *Journal of Engineering Mathematics*, Vol. 7, No. 3, 249-261, 1973.

[22] H. Benaroya, *Mechanical Vibration: Analysis, Uncertainties, and Control*, Prentice Hall, 1998.

[23] 이승엽, 사재천, 이민형, "축방향으로 이동하며 길이가 변하는 연속체의 자유진동 및 동적 안정성," 한국소음진동공학회지, 제 12권, 제 4호, pp. 272-279, 2002.

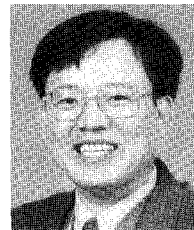
[24] 이승엽, 박상규, "길이가 변하는 현의 자유진동 특성," 한국소음진동공학회지, 제 9권, 제 5호, pp. 906-913, 1999.

[25] 류두현, 박영필, "속도경계제어를 이용한 축방향 주행 현의 횡진동 제어," 대한기계학회논문집A권, 제 25권, 제 1호, pp. 135-144, 2001.



**최지윤**

1975년 1월 13일생. 1993년~2001년 부산대학교 기계공학부 (공학사). 1994년~1996년 군복무 (항공정비병). 2001년~현재 부산대학교 지능기계공학과 석사과정. 관심분야는 분포매개변수시스템의 제어, 진동제어, 철강제어.



**홍금식**

1957년 8월 25일생. 1975년~1979년 서울대학교 기계설계학과 (공학사). 1985년~1986년 Columbia University (New York) 기계공학과 (공학석사). 1987년~1991년 University of Illinois at Urbana-Champaign (UIUC) 응용수학과 (이학석사) 및 기계공학과 (공학박사). 1991년~1992년 UIUC 기계공학과 Post-doctoral Fellow. 1979년~1982년 군복무 (포병). 1982년~1985년 대우중공업 (인천) 기술연구소 연구원 (소음/진동 담당). 1993년~현재 부산대학교 공과대학 전임강사, 조교수, 부교수. 1996년~1999년 제어·자동화·시스템공학 논문지 편집위원. 2000년~현재 Automatica, Associate Editor. 관심분야는 시스템이론, 적응제어, 비선형제어, 분포매개변수시스템의 제어.